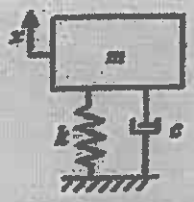
Exame 23/12/2005 Duração 45 minutos SEM CONSULTA

PARTE TEÓRICA



1. A equação que descreve o movimento do sistema representado na figura é: $m\ddot{x}(t)+c\dot{x}(t)+kx(t)=0$.

a) Estabeleça a equação característica e obtenha as suas raízes em função de m, c e k.

b) Que valor deve ter c para que, após uma perturbação inicial, a massa tenda para a posição de equilíbrio o mais rapidamente possível? Para esse valor de c, para um deslocamento inicial $x_0<0$ e uma velocidade inicial $\dot{x}_0=0$, esboce a resposta da massa.

2. Considere novamente o sistema representado na figura anterior, mas com a massa sujeita a uma força vertical, com amplitude $f(t)$.

a) Indique dois métodos alternativos para calcular o deslocamento $x(t)$, quando o sistema é sujeito a uma excitação não periódica. Integral de Duhamel e integração numérica

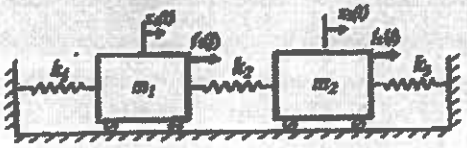
b) Suponha que a excitação $f(t)$ se deve a uma massa descentrada num motor rotativo e que a força transmitida à base quando o sistema vibra em regime estacionário tem amplitude elevada. Após o período de arranque do motor, a velocidade de rotação é constante.

Como alteraria a rigidez da mola de modo a diminuir a amplitude da força transmitida em funcionamento? A alteração proposta evitaria sempre a transmissão de forças com grandes amplitudes (justifique sucintamente)?

c) Considerando apenas a resposta permanente do sistema não amortecido, deduza expressões para a amplitude e a fase da força transmitida ao suporte do sistema quando a excitação é harmónica.

3.

a) Demonstre que os modos naturais de sistemas discretos com n graus de liberdade são, em geral, ortogonais em relação às matrizes de massa e de rigidez.



b) Suponha que as forças aplicadas ao sistema representado na figura são $f_1(t)=F_1\cos(\omega t)$ e $f_2=0$ e que ω varia. Quais as amplitudes máximas do movimento das massas do sistema (sistema idealizado) e a que frequências ocorrem? Qual é a amplitude mínima, em módulo, de vibração da massa 1?

4. Deduza a equação do movimento que representa as vibrações longitudinais $u(x,t)$ de uma barra de secção recta com área $A(x)$, com módulo de elasticidade longitudinal E, massa volúmica ρ e sujeita a uma força por unidade de comprimento $f(x,t)$, segundo x.

Exame Especial de Vibrações FEUP - DEMEGI 23 de Dezembro de 2005
COM CONSULTA de UM TEXTO DE APOIO 2.15

1.

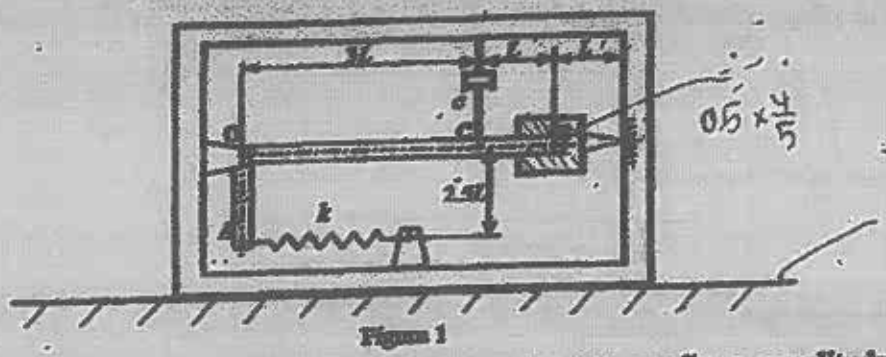


Figura 1

O desenho (Figura 1) representa um instrumento para medir a amplitude do deslocamento vertical de vibração de uma superfície. O instrumento é constituído por:
- Um braço rígido AOB em forma de L, de massa desprezável e que roda em torno do ponto O;
- Um corpo rígido de massa de m e momento de inércia I_B (unidades kg m^2) em relação a um eixo que passa por B; este corpo encontra-se ligado ao braço no ponto B;
- Um amortecedor de constante de amortecimento c, ligado ao braço no ponto C;
- Uma mola de constante de rigidez k, ligada ao braço no ponto A.

Em equilíbrio estático o segmento OB encontra-se na horizontal. Assuma que os deslocamentos são pequenos.

a) Obtenha a equação do movimento de rotação do braço.

Suponha que a frequência natural não amortecida do instrumento é 2.5 Hz, a razão entre duas amplitudes consecutivas de vibração em regime livre é 1/11 e a massa é 0.5 Kg. Suponha ainda que a equação do movimento angular é: $25\ddot{\theta}(t)+9c\dot{\theta}(t)+6.25\theta(t)=0$

Determine:

b) a constante de rigidez da mola;
c) a razão de amortecimento;
d) a constante de amortecimento;
e) a amplitude do deslocamento de vibração da superfície quando a frequência de vibração é 2 Hz e o ponteiro indica uma amplitude de 0.5 mm (nota: o instrumento não se encontra calibrado).

CONFIRMAR D

2. O sistema representado na Figura 2 é constituído por um carro rígido de massa $2m$, ligado ao exterior por uma mola de rigidez k, que translada na direcção horizontal (deslocamento $x_1(t)$) por acção de uma solicitação harmónica $F\cos(\omega t)$. Tendo-se verificado a existência de vibrações indesejáveis acrescentou-se um disco rígido de massa m e raio R (momento de inércia $mR^2/2$ [kg m^2]) ligado ao carro por uma mola de rigidez k. O disco roda sem escorregar sobre o carro e $x_2(t)$ designa o deslocamento absoluto do seu centro de massa na horizontal. Determine

a) as equações do movimento recorrendo às Equações de Lagrange;
b) as frequências naturais e as formas naturais de vibração;
c) as equações de movimento na base modal;
d) o valor da frequência de excitação para a qual a amplitude de vibração do carro é nula.

Exame Especial de Vibrações – 23/12/05

2. $J_{G_2} = m\frac{R^2}{2}$ kg m² ← CONFIRMAR!

a) $T = \frac{1}{2}(2m)\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_2^2$ (passo que não é o J_{G_2})

$V = \frac{1}{2}Kx_1^2 + \frac{1}{2}K(x_2 - x_1)^2$

Forças não-conservativas.

$Q_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(F\cos(\omega t)\cdot x_1\right) = F\cos\omega t$

$Q_2 = \frac{\partial}{\partial x_2}\left(F\cos(\omega t)\cdot x_2\right) = 0$

Então:

$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1} = 2m\dot{x}_1 \quad \rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1}\right) = 2m\ddot{x}_1$

$\frac{\partial T}{\partial x_1} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial V}{\partial x_1} = Kx_1 - K(x_2 - x_1) = 2Kx_1 - Kx_2$

$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2} = m\dot{x}_2 \quad \rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2}\right) = m\ddot{x}_2$

$\frac{\partial T}{\partial x_2} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial V}{\partial x_2} = K(x_2 - x_1) = -Kx_1 + Kx_2$

(46)

Ficando:

$$\begin{cases} 2m\ddot{x}_1(t) + 2Kx_1(t) - Kx_2(t) = F\cos\omega t \\ m\ddot{x}_2(t) - Kx_1(t) + Kx_2(t) = 0 \end{cases}$$

Nº. matricial:

$$\begin{bmatrix} 2m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x}_1(t) \\ \ddot{x}_2(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 2K & -K \\ -K & K \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F\cos(\omega t) \\ 0 \end{Bmatrix}$$

b) Fazendo $\{x(t)\} = \{A\}\cos(\omega t - \phi)$ e considerando regime:

$$\begin{bmatrix} 2K - 2m\omega^2 & -K \\ -K & K - m\omega^2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2K - 2m\omega^2 & -K \\ -K & K - m\omega^2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \omega_1 = \frac{\sqrt{2K(2-\sqrt{2})}}{2\sqrt{m}} \cong$$

$\cong 0{,}5412\sqrt{\frac{K}{m}}$ e $\omega_2 = \frac{\sqrt{2K(\sqrt{2}+2)}}{2\sqrt{m}} \cong 1{,}3066\sqrt{\frac{K}{m}}$

1ª Forma natural:

$\left(2K - 2m\omega_1^2\right)A_{11} - KA_{21} = 0 \Rightarrow A_{11} = \frac{K}{2K - 2m\times\frac{4-\sqrt{2}}{2}\frac{K}{m}}$

ou $A_{11} = \frac{1}{2-(2-\sqrt{2})}A_{21} \Rightarrow A_{11} = \frac{\sqrt{2}}{2}A_{21}$

$$\Rightarrow \boxed{\omega = \sqrt{\frac{K}{m}}}$$

3. a)

$$v(x,t)\Big|_{x=0} = 0 \Rightarrow V(x)\Big|_{x=0} = 0 \qquad (1)$$

$$v(x,t)\Big|_{x=l} = 0 \Rightarrow V(x)\Big|_{x=l} = 0 \qquad (2)$$

$$EI \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2}\Big|_{x=0} = 0 \Rightarrow \frac{d^2 V(x)}{dx^2}\Big|_{x=0} = 0 \qquad (3)$$

$$EI \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2}\Big|_{x=l} = K_t \frac{\partial v(x,t)}{\partial x}\Big|_{x=l} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 V(x)}{dx^2}\Big|_{x=l} = \frac{K_t}{EI} \frac{dV(x)}{dx}\Big|_{x=l} \qquad (4)$$

(1) e (2) cond. fronteira geométricas

(3) e (4) cond. fronteira naturais

b) É derivável pelo menos 2 vezes? Sim, função harmónica.

Verifica as cond fronteira geométricas?

$$V(x)\Big|_{x=0} = 0 \Rightarrow \delta \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{l} \times c\right) = 0 \quad \checkmark \quad (1)$$

$$V(x)\Big|_{x=l} = 0 \Rightarrow \delta \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{\cancel{l}} \times \cancel{l}\right) = 0 \quad \checkmark \quad (2)$$

Logo, é uma função admissível!

c)

$$T_{max} = \omega^2\left(\frac{1}{2}\int_0^l \rho A (V(x))^2 dx + \cancel{T^*_{cfn}}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{T_{max}}{\omega^2} = \frac{\rho A}{2}\int_0^l \delta^2 \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{l}x\right) dx \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow T^*_{max} = \frac{\rho A}{2} \cdot \delta^2 \frac{l}{2} \times 1 \times \cancel{2} \times \frac{1}{\cancel{2}} = \frac{\rho A}{2} \cdot \frac{\delta^2 l}{2}$$

$$V_{max} = \frac{1}{2}\int_0^l EI \left(\frac{d^2 V(x)}{dx^2}\right)^2 dx + \frac{1}{2} K \left(V\left(\frac{l}{2}\right)\right)^2 +$$

$$+ \frac{1}{2} K_t \left(\frac{dV(x)}{dx}\Big|_{x=l}\right)^2 = \frac{EI}{2}\int_0^l \left(-\delta \frac{\pi^2}{l^2} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{l}x\right)\right)^2 dx +$$

$$+ \frac{1}{2} K \delta^2 \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{\cancel{l}} \cdot \frac{\cancel{l}}{2}\right) + \frac{1}{2} K_t \left(\delta \frac{\pi}{l} \cos\left(\frac{\pi}{\cancel{l}} \cdot \cancel{l}\right)\right)^2 =$$

$$= \frac{EI}{2} \delta^2 \frac{\pi^4}{l^4} \cdot \left(\frac{l}{2} \times 1 \times \cancel{2} \times \frac{1}{\cancel{2}}\right) + \frac{1}{2} K \delta^2 - \frac{1}{2} K_t \delta^2 \frac{\pi^2}{l^2} =$$

Exame 23 de Dezembro de 2005

PARTE TEÓRICA

3.

a) Sabe-se que $[K]\{\phi\}_r = \omega^2 [m]\{\phi\}_r$

2 soluções distintas: $\{\phi\}_r$ e $\{\phi\}_s$, assim:

$$[K]\{\phi\}_r = \omega_r^2 [m]\{\phi\}_r \quad (1)$$

$$[K]\{\phi\}_s = \omega_s^2 [m]\{\phi\}_s \quad (2)$$

Pre-multiplicando a expressão (1) por $\{\phi\}_s^T$ e (2) por $\{\phi\}_r^T$:

$$\{\phi\}_s^T [K]\{\phi\}_r = \omega_r^2 \{\phi\}_s^T [m]\{\phi\}_r \quad (3)$$

$$\{\phi\}_r^T [K]\{\phi\}_s = \omega_s^2 \{\phi\}_r^T [m]\{\phi\}_s \quad (4)$$

Como $[m] = [m]^T$ e $[K] = [K]^T$, de (4):

$$[\phi]_s^T [K]\{\phi\}_r = \omega_s^2 \{\phi\}_s^T [m]\{\phi\}_r \quad (5)$$

Subtraindo (3) a (5):

$$0 = (\omega_s^2 - \omega_r^2)\{\phi\}_s^T [m]\{\phi\}_r$$

Como $\omega_r \neq \omega_s \therefore \{\phi\}_s^T [m]\{\phi\}_r = \delta_{rs}$, $r,s = 1 \ldots m$

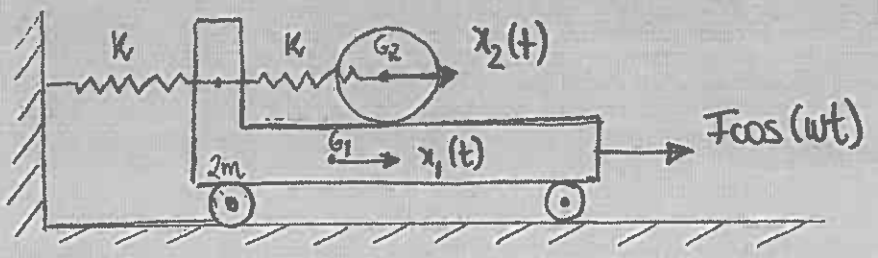
com $\delta_{rs} = \begin{cases} 1 & r = s \\ 0 & r \neq s \end{cases}$

Assim

$$\{\phi\}_s^T [m]\{\phi\}_r = \omega_s^2 \delta_{rs}$$

PARTE PRÁTICA

2.



a) $J_{G_2} = m\frac{R^2}{2}$

$$T = \frac{1}{2}(2m)\cdot \dot{x}_1^{\,2} + \frac{1}{2} m \dot{x}_2^{\,2} + \frac{1}{2} J_{G_2}\left(\frac{\dot{x}_2 - \dot{x}_1}{r}\right)^2$$

$$V = \frac{1}{2} K x_1^{\,2} + \frac{1}{2} K (x_2 - x_1)^2$$

$$Q_1 = \frac{d}{dx_1}(F\cos\omega t \cdot x_1) = F\cos\omega t$$

$$Q_2 = \frac{d}{dx_2}(F\cos\omega t \cdot x_1) = 0$$

Equações de Lagrange:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1}\right) - \frac{\partial T}{\partial x_1} + \frac{\partial V}{\partial x_1} = Q_1 \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2}\right) - \frac{d}{dx_2} + \frac{\partial V}{\partial x_2} = Q_2 \end{cases}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1} = 2m\dot{x}_1 \longrightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1}\right) = 2m\ddot{x}_1$$

$$\frac{\partial T}{\partial x_1} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial V}{\partial x_1} = Kx_1 - K(x_2 - x_1) = 2Kx_1 - Kx_2$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2} = m\dot{x}_2 \longrightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2}\right) = m\ddot{x}_2$$

$$\frac{\partial T}{\partial x_2} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial V}{\partial x_2} = K(x_2 - x_1) = -Kx_1 + Kx_2$$

c) $\{\phi\}_1 = \frac{1}{\sqrt{\{u\}_1^T [m] \{u\}_1}} \cdot \{u\}_1 = \begin{Bmatrix} 0{,}5/\sqrt{m} \\ 0{,}7071/\sqrt{m} \end{Bmatrix}$

$\{\phi\}_2 = \frac{1}{\sqrt{\{u\}_2^T [m] \{u\}_2}} \{u\}_2 = \begin{Bmatrix} -0{,}5/\sqrt{m} \\ 0{,}7071/\sqrt{m} \end{Bmatrix}$

$\Rightarrow \{\phi\} = \frac{1}{\sqrt{m}} \begin{bmatrix} 0{,}5 & -0 \\ 0{,}7071 & 0{,} \end{bmatrix}$

$$[I]\{\ddot{\eta}(t)\} + [\Omega^2]\{\eta(t)\} = [\phi]^T \{f(t)\}$$

$$\begin{Bmatrix} \ddot{\eta}_1(t) \\ \ddot{\eta}_2(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0{,}5451^2 \frac{K}{m} & 0 \\ 0 & 1{,}3066^2 \frac{K}{m} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \eta_1(t) \\ \eta_2(t) \end{Bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{m}} \begin{bmatrix} 0{,}5 & -0{,}5 \\ 0{,}7071 & 0{,}7071 \end{bmatrix}^T \begin{Bmatrix} F\cos\omega t \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{cases} \ddot{\eta}_1(t) + 0{,}5451^2 \frac{K}{m} \cdot \eta_1(t) = \frac{0{,}5F}{\sqrt{m}} \cos\omega t \\ \ddot{\eta}_2(t) + 1{,}3066^2 \frac{K}{m} \eta_2(t) = -\frac{0{,}5F}{\sqrt{m}} \cos\omega t \end{cases}$$

d) $X_1(\omega) = 0$

A partir de b): $X_1(\omega) = \frac{(K - \omega^2 m)F - 0}{(2K - \omega^2 m)(K - \omega^2 m) - K^2} = 0$

$(K - \omega^2 m)F = 0 \quad \therefore \quad F = 0 \;\; V \;\; K - \omega^2 m = 0$

$\omega^2 = \frac{K}{m} \quad \therefore \quad \omega = \sqrt{\frac{K}{m}}$

c) $V_{máx} = \frac{1}{2}\int_0^\ell EI\left(\frac{\delta^2 V(x)}{dx^2}\right)^2 dx + \frac{1}{2} K V(\ell/2)^2 + \frac{1}{2} K_t \frac{dV(\ell)}{dx}^2$

$= \frac{EI}{2}\int_0^\ell \left(-\delta \frac{\pi}{\ell^2}^2 \operatorname{sen} \frac{\pi}{\ell} x\right)^2 dx + \frac{1}{2} K \delta^2 \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{\ell}\cdot\frac{\ell}{2}\right) + \frac{1}{2} K_t \left(\delta \frac{\pi}{\ell} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{\ell}\ell\right)\right)^2 =$

$= \frac{EI}{2} \cdot \delta^2 \frac{\pi^4}{\ell^4} \cdot \frac{\ell}{2} + \frac{1}{2} K \delta^2 + \frac{1}{2} K_t \delta^2 \frac{\pi^2}{\ell^2}$

$T_{máx} = \omega^2\left(\frac{1}{2}\int_0^\ell \rho A(x) V(x)^2 dx + T_{c/m}\right) =$

$= \omega^2 \cdot \frac{\rho A}{2}\int_0^\ell \delta^2 \operatorname{sen}^2 \frac{\pi}{\ell} x \, dx = \omega^2 \frac{\rho A}{2} \cdot \frac{\delta^2 \ell}{2}$

$R(V(x)) = \omega^2 = \dfrac{\frac{1}{2}\frac{EI}{\ell^4} \cdot \frac{\delta^2 \pi^4 \ell}{2} + \frac{1}{2} K \delta^2 + \frac{1}{2} K_t \delta^2 \frac{\pi^2}{\ell^2}}{\frac{\rho A}{2} \cdot \frac{\delta^2 \ell}{2}}$

$= \dfrac{\frac{EI}{\ell^4} \cdot \frac{\pi^4 \ell}{2} + K + K_t \frac{\pi^2}{\ell^2}}{\frac{\rho A \ell}{2}}$

d) (1) $K \to 0$ e $K_t \to 0$

↳ mas alteram as cond. fronteira ✓

(2) $K \to \infty$ e $K_t \to 0$

↳ mas altera CF

↳ Altera! Passa a haver um apoio simples em $x = \frac{\ell}{2}$

$V(x)\Big|_{x=\ell/2} = 0 \therefore \delta \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{\ell}\cdot\frac{\ell}{2}\right) = 0 \therefore \delta = 0$

↳ $V(x) = 0$ ✗

Logo para $K \to \infty$, $V(x)$ não é admissível!